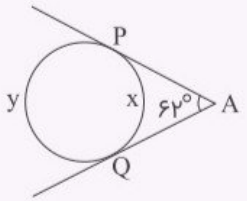
آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **هندسه**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی**	**پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۱۲ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	سوالات	نمره

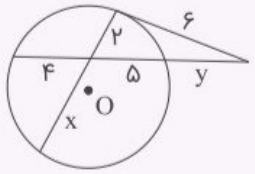
هندسه

۱ با توجه به شکل مقدار x و y را بیابید.

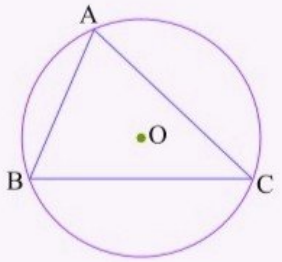
الف



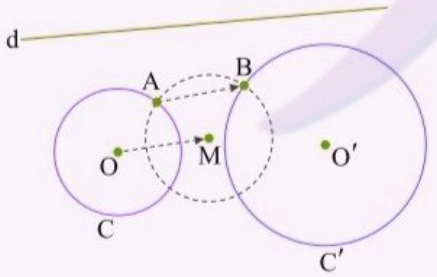
ب



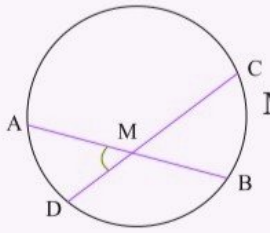
۲ مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و دایرهٔ محیطی آن مفروض است. ثابت کنید شعاع دایرهٔ محیطی آن برابر است با $R = \frac{abc}{۴S}$. (S مساحت مثلث ABC است)



۳ دو دایرهٔ C و C' و خط d مفروض‌اند. پاره‌خطی به طول ℓ طوری رسم کنید که موازی d باشد و ابتدای آن روی C و انتهای آن روی C' باشد.



۴ در شکل زیر ثابت کنید:

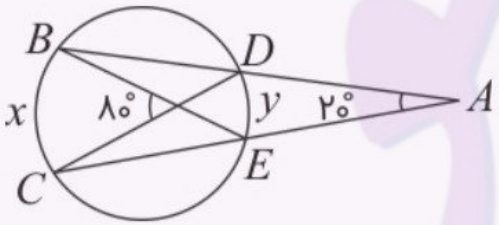


$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{۲}$$

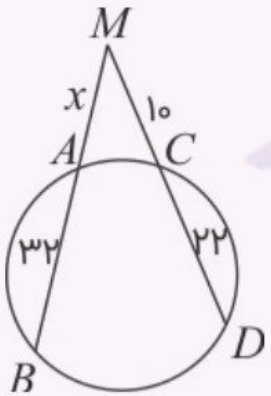
۵ دو دایرهٔ C و C' و خط d مفروض‌اند. پاره‌خطی به طول ℓ طوری رسم کنید که موازی d باشد و ابتدای آن روی C و انتهای آن روی C' باشد.

۶ در هر یک از شکل‌های زیر مقادیر مجهول را بیابید.

الف

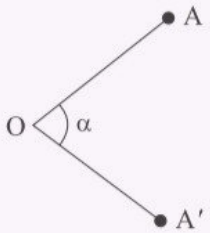


ب

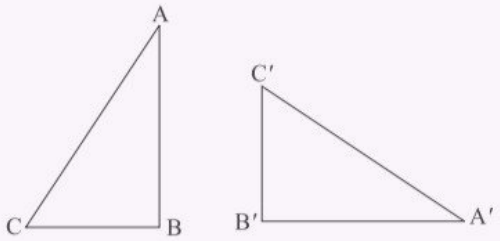


۷ به سوالات زیر پاسخ دهید:

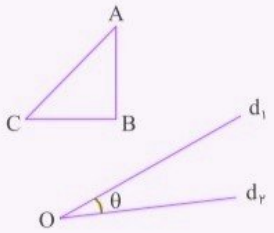
الف در شکل زیر نقطهٔ A' دوران‌یافته نقطهٔ A در دوران به مرکز O و زاویهٔ α است. نشان دهید عمودمنصف AA' از نقطهٔ O می‌گذرد.



ب اگر بدانیم $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ دوران‌یافتهٔ ABC است، چگونه می‌توان مرکز دوران را مشخص کرد؟



۸ در شکل زیر، دو خط d_1 و d_2 با زاویه θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.

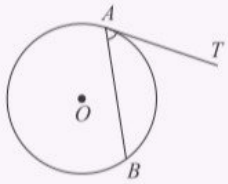


الف نشان دهید $A\hat{O}A'' = 2\theta$

ب با چه تبدیلی می‌توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۹ قضیه: باتوجه‌به شکل ثابت کنید در دایرهٔ (O) اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر با نصف کمان روبه‌روی آن است.



۱۰ اصطلاحات زیر را با رسم شکل تعریف کنید.

الف دوران

ب تجانس معکوس

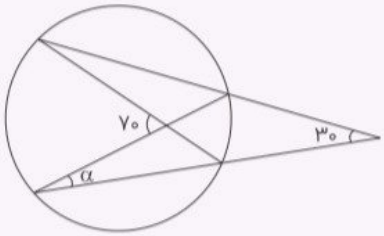
۱۱ دایره‌ای به شعاع $۳x - ۴$ مفروض است:

الف اگر نقطه A داخل دایره و به فاصله $x + ۳$ از مرکز دایره قرار گرفته باشد حدود x را بیابید.

ب اگر خط d به فاصله $۲x - ۱$ از مرکز دایره باشد و بین خط d و دایره نقطه اشتراکی نداشته باشیم حدود x را بیابید.

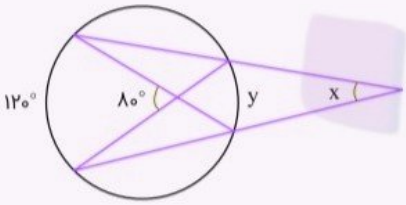
پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۲ در شکل زیر مقدار α را به دست آورید.



۱۳ با استفاده از تعریف زاویهٔ محاطی، نشان دهید مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.

۱۴ با توجه به شکل، مقدار x را محاسبه کنید.



۱۵ قضیه: ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند و به‌عکس.

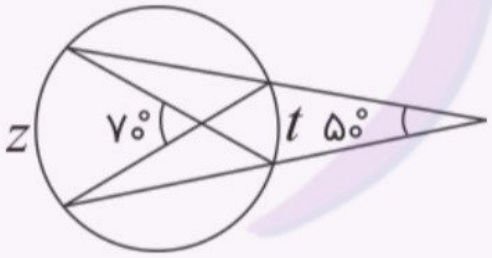
پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۶ قضیه: ثابت کنید اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر قدر مطلق نصف تفاضل اندازهٔ کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدودند.

۱۷ در مثلثی به ضلع $۲\sqrt{۳}$، $\sqrt{۳}$ و ۳ شعاع دایره محیطی چقدر است؟

۱۸ ثابت کنید در دو دایره متخارج، اندازه مماس مشترک خارجی از رابطه $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$ به‌دست می‌آید. (R و R' شعاع‌های دو دایره و d فاصله بین مرکزهای دو دایره می‌باشند.)

۱۹ در شکل زیر مقدار z و t را بیابید.



۲۰ قضیه: ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگر باشند، آن چهارضلعی محاطی است.

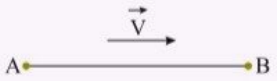
۲۱ اگر r_a، r_b و r_c شعاع‌های سه دایرهٔ محاطی خارجی و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث باشند، ثابت کنید:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

۲۲ ثابت کنید یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.

۲۳ ثابت کنید شعاع دایره محاطی خارجی نظیر رأس A در مثلث ABC از رابطه $r_a=\frac{S}{p-a}$ به‌دست می‌آید. (p نصف محیط مثلث و S مساحت مثلث است.)

۲۴ باتوجه‌به شکل زیر نشان دهید در تبدیل انتقال، اندازهٔ هر پاره‌خط و اندازهٔ تصویر آن باهم برابرند. ($AB \parallel \vec{V}$ و اندازهٔ $\vec{V}$ از اندازهٔ پاره‌خط AB کوچک‌تر است.)



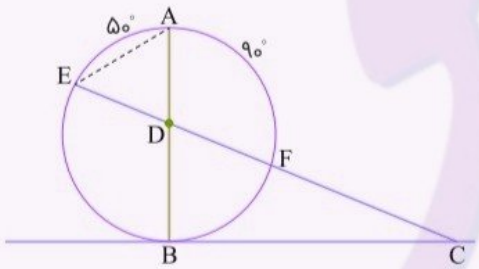
۲۵ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف تبدیل انتقال، شیب خط را حفظ می‌کند.

ب تبدیل تجانس غیرهمانی، نقطهٔ ثابت تبدیل دارد.

۲۶ ثابت کنید هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازه مماس برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطعه قاطع.

۲۷ در شکل زیر AB قطر دایره و BC مماس بر دایره است. $\widehat{AE} = ۵۰^\circ$ و $\widehat{AF} = ۹۰^\circ$ می‌باشد. اندازهٔ زوایای $B\hat{D}F$، $F\hat{C}B$ و $B\hat{A}E$ را به دست آورید.



۲۸ اگر دو شهر به نام‌های A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به‌طوری‌که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟

۲۹ نقطه A به فاصله $۲\sqrt{۶}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطه A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطه A' می‌نامیم. اگر نقطه A را حول نقطه A' به اندازه ۱۲۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم تا نقطه A'' حاصل شود، طول AA'' چقدر است؟

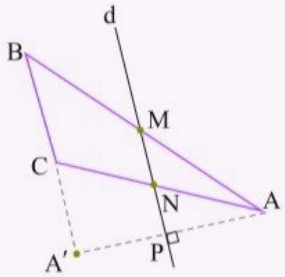
به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۳۰ درستی یا نادرستی جدول را مشخص کنید.

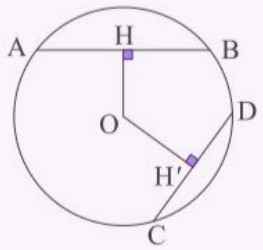
	شیب خط را حفظ می‌کند	جهت شکل را حفظ می‌کند
دوران		
تجانس		

۳۱ در انتقال پاره‌خط AB توسط بردار $\overrightarrow{V}$، اگر پاره‌خط AB و بردار انتقال، موازی نباشند، ثابت کنید شیب پاره‌خط حفظ می‌شود.

۳۲ در شکل زیر M و N وسط‌های دو ضلع AB و AC هستند. نقطه A'بازتاب نقطه A نسبت به خط d است. زاویه $A\hat{A'}C$ چند درجه است؟

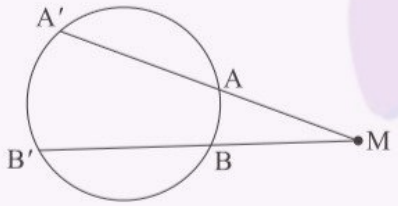


۳۳ در دایرهٔ $C(O\ ,\ R)$ نشان دهید اگر $AB > CD$، آن‌گاه $OH < OH'$.



۳۴ امتداد دو وتر AA' و BB' یکدیگر را خارج دایره در نقطهٔ M قطع می‌کنند. ثابت کنید:

$$MA.MA' = MB.MB'$$



۳۵ شعاع‌های دو دایره هم مرکز ۵ و ۳ سانتی‌متر هستند، اندازهٔ وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است را محاسبه کنید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۶ ثابت کنید در هر تبدیل طولپا، تبدیل‌یافتهٔ هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازهٔ آن است.

۳۷ از نقطه تماس دو دایره که مماس خارجی هستند، دو خط چنان رسم می‌کنیم که دو دایره را در چهار نقطه دیگر قطع کند. ثابت کنید چهار نقطه فوق، رئوس یک ذوزنقه هستند.

۳۸ نقطهٔ A وسط کمان BC از یک دایره مفروض است. از نقطهٔ A دو وتر دلخواه AD و AE را رسم می‌کنیم تا وتر BC را به ترتیب در M و N قطع کند. ثابت کنید چهار ضلعی $MDEN$ محاطی است.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

ردیف	پاسخنامه	نمره

هندسه

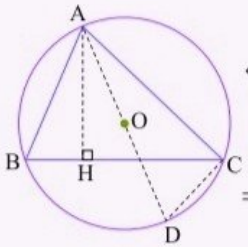
۱ الف

$$\frac{y-x}{۲}=۶۲^\circ\ (۰/۲۵)$$
$$x+y=۳۶۰^\circ\ (۰/۲۵)$$
$$\Rightarrow y=۲۴۲^\circ, x=۱۱۸^\circ\ (۰/۲۵)$$

ب

$$۲x=۴\times ۵\ (۰/۲۵)\Rightarrow x=۱۰$$
$$۶^۲=y\times(y+۵+۴)\ (۰/۲۵)\Rightarrow y^۲+۹y-۳۶=۰$$
$$y=۳\ (\text{ق.ق})\ (۰/۲۵)\quad \text{یا}\quad y=-۱۲\ (\text{غ.ق.ق})\ (۰/۲۵)$$

۲ ارتفاع AH و قطر AD از دایره را رسم می‌کنیم.



$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{D}=\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\\ D\hat{C}A=\hat{H}=۹۰^\circ\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{AHB}\sim\overset{\Delta}{ACD}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\frac{c}{۲R}=\frac{h_a}{b}\Rightarrow R=\frac{bc}{۲h_a}\quad (۱)$$

$$S=\frac{۱}{۲}a.h_a\Rightarrow h_a=\frac{۲S}{a}\quad (۲)$$

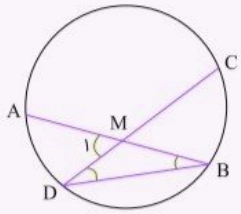
$$(۱),(۲)\Rightarrow R=\frac{bc}{\frac{۴S}{a}}\Rightarrow R=\frac{abc}{۴S}$$

۳ ابتدا دایرهٔ C را در راستای برداری به موازات d و به طول ℓ انتقال می‌دهیم.

$$\overrightarrow{OM}=\vec{\ell}$$

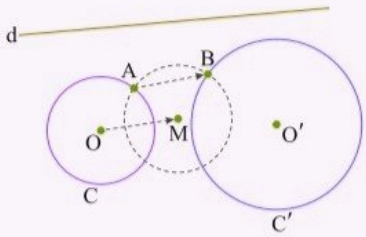
نقطهٔ B روی دایرهٔ C' اگر به اندازهٔ $\overrightarrow{OM}$ به حالت قبل برگردد، به نقطهٔ A می‌رسیم. جواب مسئله AB است.

۴



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{MBD}: \text{زاویه خارجی } \hat{M}_۱ = \hat{B} + \hat{D} \\ \text{زاویه محاطی } \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \\ \text{زاویه محاطی } \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{۲}$$

۵ ابتدا دایرهٔ C را در راستای برداری به موازات d و به طول ℓ انتقال می‌دهیم.



$$\overrightarrow{OM} = \vec{\ell}$$

نقطهٔ B روی دایرهٔ C' اگر به‌اندازهٔ $\overrightarrow{OM}$ به حالت قبل برگردد، به نقطهٔ A می‌رسیم. جواب مسئله AB است.

۶ الف

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{۲} = ۸۰ \\ \dfrac{x-y}{۲} = ۲۰ \end{cases} \xrightarrow{(۰/۵)} \begin{array}{l} x+y = ۱۶۰ \\ x-y = ۴۰ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = ۱۰۰ \\ y = ۶۰ \end{array} (۰/۵)$$

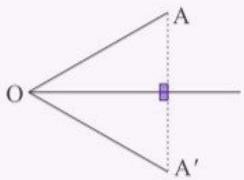
ب

$$x(x+۳۲) = ۱۰ \times ۳۲ \xrightarrow{(۰/۲۵)} x^۲ + ۳۲x - ۳۲۰ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۸ \quad (\text{ق.ق})\ (۰/۲۵) \\ x = -۴۰ \quad (\text{غ.ق.ق})\ (۰/۲۵) \end{cases}$$

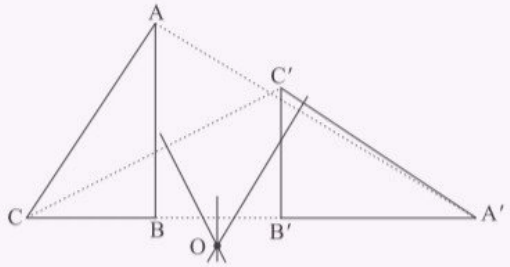
۷ الف

A' دوران‌یافته A حول O است: $OA = OA'$

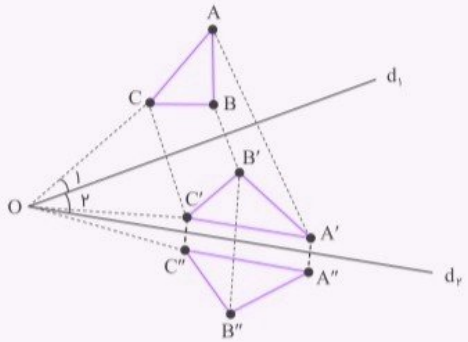
طبق ویژگی عمودمنصف‌ها، O از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، پس روی عمودمنصف AA' است.



ب هر نقطه را به تصویرش وصل می‌کنیم، عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های ایجادشده را رسم می‌کنیم. نقطهٔ همرسی این عمودمنصف‌ها مرکز دوران خواهد بود.



۸ الف



$$\begin{cases} d_1 \underset{\text{منصف}}{\perp} CC'' \\ \overset{\Delta}{OCC''} \text{ متساوی‌الساقین} \end{cases} \Rightarrow d_1 \text{ نیمساز} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

به همین ترتیب : $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$

$\Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = \overset{\Delta}{COC''}$

$\hat{O}_1 + \hat{O}_4 = \theta \ , \ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = \theta$

$\Rightarrow \overset{\Delta}{COC''} = 2\theta$

ب چون $C\widehat{O}C''$ و $B\widehat{O}B''$ و $A\widehat{O}A''$ همگی برابر 2θ می‌باشند نسبت به مرکز O می‌توان دوران را به کار برد با زاویه 2θ.

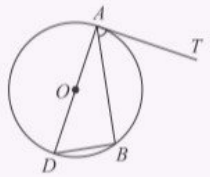
۹ زاویهٔ ظلی $B\hat{A}T$ را در دایره‌ای به مرکز O در نظر می‌گیریم. قطر AD از این دایره را رسم می‌کنیم و از D به نقطهٔ B وصل می‌نماییم (۰/۲۵).

زاویهٔ $A\hat{B}D$ محاطی روبه‌رو به قطر مساوی 90° است پس: (۱) (۰/۲۵) $A\hat{D}B + D\hat{A}B = 90^\circ$

از طرفی: (۲) (۰/۲۵) $D\hat{A}B + B\hat{A}T = 90^\circ$

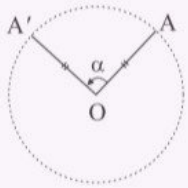
از رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $B\hat{A}T = A\hat{D}B$ (۰/۲۵)

اما می‌دانیم $A\hat{D}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ ، پس: $B\hat{A}T = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ (۰/۲۵)



۱۰

الف نقطهٔ ثابت O به نام مرکز دوران و زاویهٔ معلوم و مشخص α به نام زاویهٔ دوران مفروض است.



دوران R به مرکز نقطهٔ ثابت O و زاویهٔ α، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطهٔ A باشد، داریم:

$$OA = OA' \quad , \quad A\hat{O}A' = \alpha$$

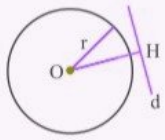
ب اگر نسبت تجانس یعنی k منفی باشد، تجانس را معکوس یا وارونه گویند.

۱۱ **الف**

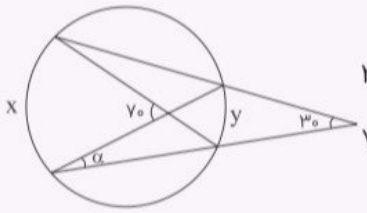
$$\left.\begin{array}{ll} r > ۰ \Rightarrow ۳x - ۴ > ۰ \Rightarrow x > \frac{۴}{۳} & (I) \\ OA > ۰ \Rightarrow x + ۳ > ۰ \Rightarrow x > -۳ & (II) \\ OA < r \Rightarrow x + ۳ < ۳x - ۴ \Rightarrow ۲x > ۷ \Rightarrow x > \frac{۷}{۲} & (III) \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} x > \frac{۷}{۲}$$

ب

$$\left.\begin{array}{l} r > ۰ \Rightarrow ۳x - ۴ > ۰ \Rightarrow x > \frac{۴}{۳} \\ OH > ۰ \Rightarrow ۲x - ۱ > ۰ \Rightarrow ۲x > ۱ \Rightarrow x > \frac{۱}{۲} \\ \underbrace{OH > r}_{\text{بدون نقطه اشتراک}} \quad ۲x - ۱ > ۳x - ۴ \Rightarrow x < ۳ \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} \frac{۴}{۳} < x < ۳$$



۱۲

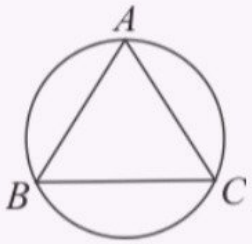


$$\left.\begin{array}{l} ۳۰ = \dfrac{x-y}{۲} \Rightarrow x-y=۶۰ \\ ۷۰ = \dfrac{x+y}{۲} \Rightarrow x+y=۱۴۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲x = ۲۰۰ \Rightarrow x = ۱۰۰\ ,\ y = ۴۰$$

$$\text{محاطی}\ \alpha = \frac{y}{۲} = \frac{۴۰}{۲} = ۲۰^\circ$$

۱۳

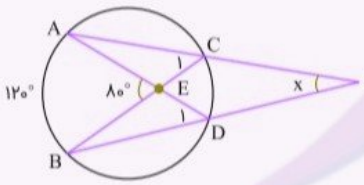
$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \\ \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \\ \hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\} \underset{(۰/۵)}{\Rightarrow} \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}}{۲} \underset{(۰/۲۵)}{=} \frac{۳۶۰}{۲} \underset{(۰/۲۵)}{=} ۱۸۰^\circ$$



۱۴ روش اول:

$$\frac{۱۲۰^\circ + y}{۲} = ۸۰^\circ,\ \frac{۱۲۰-y}{۲} = x \Rightarrow y = ۴۰^\circ, x = ۴۰^\circ$$

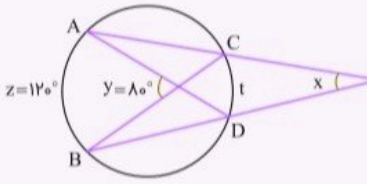
روش دوم: با استفاده از ویژگی‌های زاویهٔ محاطی و زاویهٔ خارجی داریم:



$$F\ ۸۰^\circ = \hat{C}_۱ + \hat{A} = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} + \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = ۲۰^\circ \quad (*)$$

$$\begin{cases} \hat{D}_۱ = \dfrac{۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ \\ \hat{D}_۱ = \hat{A} + x \overset{(*)}{=} ۲۰^\circ + x \end{cases} \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$

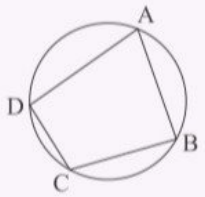
روش سوم:



$$F\ y = \frac{z+t}{۲}, x = \frac{z-t}{۲} \Rightarrow x+y=z \Rightarrow x+۸۰^\circ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

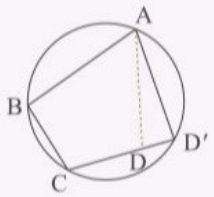
۱۵ باتوجه‌به قضیهٔ زاویهٔ محاطی داریم:



$$\hat{B}+\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{ABC}}{۲}\Rightarrow \hat{B}+\hat{D}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$

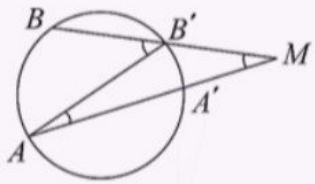
به روش مشابه ثابت می‌شود $\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$.

عکس قضیه: فرض کنیم در چهارضلعی $ABCD$، هر دو زاویهٔ روبه‌رو مکمل یکدیگر باشند. یعنی (۱) $\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ و (۲) $\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$. بر سه نقطهٔ A، B و C یک دایره می‌گذرد، ثابت می‌کنیم که این دایره از نقطهٔ D نیز می‌گذرد.



اثبات (برهان خلف): اگر این دایره از رأس D نگذرد، نقطهٔ برخورد خط CD با دایره را D' می‌نامیم و از D' به A وصل می‌کنیم. چون چهارضلعی $ABCD'$ محاطی است، بنابراین: (۳) $\hat{B}+\hat{D}'=۱۸۰^\circ$ از رابطه (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که (۴) $\hat{D}=\hat{D}'$ چون زاویهٔ D زاویه خارجی مثلث ADD' است، بنابراین: (۵) $\hat{D}>\hat{D}'$ که رابطهٔ (۵) با رابطهٔ (۴) در تناقض است. درنتیجه فرض ما که دایره از رأس D نمی‌گذرد نادرست و حکم قضیه برقرار است.

۱۶ امتداد وترهای AA' و BB' از دایرهٔ C در نقطهٔ M یکدیگر را قطع کرده‌اند. پاره‌خط AB' را رسم می‌کنیم.



رسم شکل (۰/۲۵)

$$(\overset{\triangle}{AMB'}\text{ زاویهٔ خارجی مثلث})\ A\hat{B'}B=B'\hat{A}M+A\hat{M}B'(۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow A\hat{M}B'=A\hat{B'}B-B'\hat{A}M=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}(۰/۵)$$

$$\Rightarrow A\hat{M}B=A\hat{M}B'=\frac{|\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AB'}|}{۲}$$

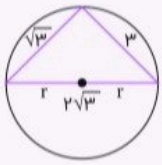
پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۷

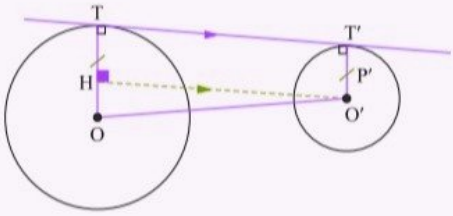
عکس قضیه فیثاغورس : $۳^۲ + \sqrt{۳}^۲ = (۲\sqrt{۳})^۲ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$

$\hat{A} = ۹۰^\circ$

$r = \frac{\text{قطر}}{۲} \Rightarrow r = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$



۱۸ از O' به موازات TT' رسم می‌کنیم.



$HTT'O'_{\text{مستطیل}} \Rightarrow \begin{cases} O'T' = TH = R' \Rightarrow OH = R - R' \\ TT' = O'H \end{cases}$

$\overset{\Delta}{OO'H} \ : \ OO'^۲ = OH^۲ + O'H^۲ \Rightarrow d^۲ = (R - R')^۲ + TT'^۲$

$\Rightarrow TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$

۱۹

$۷۰^\circ = \frac{z + t}{۲}\,(۰/۲۵) \Rightarrow z + t = ۱۴۰^\circ$

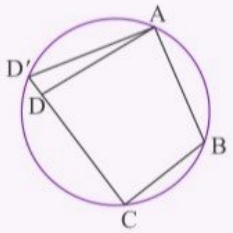
$۵۰^\circ = \frac{z - t}{۲}\,(۰/۲۵) \Rightarrow z - t = ۱۰۰^\circ$

$t = ۲۰^\circ\,(۰/۲۵) \quad , \quad z = ۱۲۰^\circ\,(۰/۲۵)$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۰ برهان: بر سه نقطهٔ A ، B ، C از چهارضلعی $ABCD$ یک دایره می گذرد (۰/۲۵) با استفاده از برهان خلف ثابت می کنیم این دایره از نقطه D نیز می گذرد. فرض می کنیم نقطهٔ برخورد خط CD با دایره D' باشد. از D' به A وصل می کنیم. (۰/۲۵) چون چهارضلعی $ABCD'$ محاطی است بنابراین: $\hat{B} + \hat{D}' = ۱۸۰^\circ$ (۰/۲۵)

بنابراین $\hat{D} = \hat{D}'$ (۰/۲۵)



به تناقض رسیدیم: زیرا $\hat{D} > \hat{D}'$ (D زاویه خارجی $\overset{\Delta}{ADD'}$)

پس حکم برقرار است.

۲۱

$$S = rp \Rightarrow \frac{۱}{r} = \frac{p}{S}$$

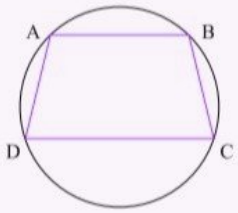
$$\left.\begin{aligned} r_a &= \frac{S}{p-a} \Rightarrow \frac{۱}{r_a} = \frac{p-a}{S} \\ r_b &= \frac{S}{p-b} \Rightarrow \frac{۱}{r_b} = \frac{p-b}{S} \\ r_c &= \frac{S}{p-c} \Rightarrow \frac{۱}{r_c} = \frac{p-c}{S} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S}$$

$$= \frac{۳p - (a+b+c)}{S} = \frac{p}{S} = \frac{۱}{r}$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۲

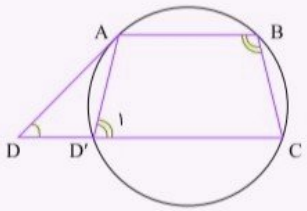


محاطی ABCD (فرض
$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$ (حکم

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{۲}\\ \hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{DAB}}{۲}\end{array}\right\}\xrightarrow{+}\hat{A}+\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{DAB}}{۲}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$$

$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$ (فرض
محاطی ABCD (حکم

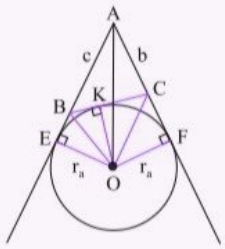
از نقطه A، B و C دایره‌ای عبور می‌دهیم. فرض می‌کنیم که دایره از D عبور نکند، پس CD یا امتداد آن را در نقطه‌ای مانند D' قطع می‌کند.



$$\left.\begin{array}{l}\text{محاطی } ABCD' \Rightarrow \hat{B}+\hat{D'}_۱=۱۸۰^\circ\\ \text{فرض} \Rightarrow \hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{D'}_۱=\hat{D}$$

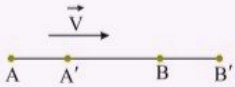
دو زاویه $\hat{D}$ و $\hat{D'}_۱$ نمی‌توانند برابر باشند زیرا $\hat{D'}_۱$ زاویه خارجی است و باید از $\hat{D}$ بزرگ‌تر باشد، پس دایره نمی‌تواند از D نگذرد، پس از آن عبور کرده و ABCD محاطی می‌شود.

۲۳



$$S=S_{\overset{\triangle}{AOB}}+S_{\overset{\triangle}{AOC}}-S_{\overset{\triangle}{BOC}}$$
$$S=\frac{۱}{۲}r_a\cdot c+\frac{۱}{۲}r_a\cdot b-\frac{۱}{۲}r_a\cdot a$$
$$S=\frac{۱}{۲}r_a(c+b-a)=\frac{۱}{۲}r_a(۲p-۲a)=r_a(p-a)\Rightarrow r_a=\frac{S}{p-a}$$

۲۴



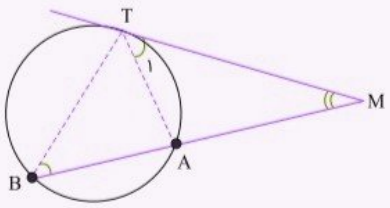
$$\begin{cases} AB = AA' + A'B \\ A'B' = BB' + A'B \end{cases} \xrightarrow{AA'=BB'} AB = A'B'$$

۲۵

الف درست

ب درست (مرکز تجانس نقطهٔ ثابت تبدیل است)

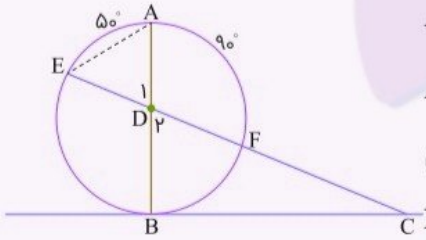
۲۶ از T به A و B وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{T}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AT}}{۲} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array}\right\} \Rightarrow M\overset{\Delta}{T}A \overset{(ز ز)}{\sim} M\overset{\Delta}{T}B$$

$$\Rightarrow \frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT} \Rightarrow MT^۲ = MA \cdot MB$$

۲۷



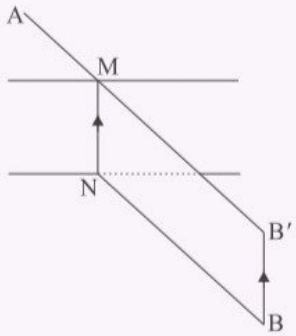
$$A\overset{\frown}{E}B = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\overset{\frown}{AE}=۵۰^\circ} \overset{\frown}{BE} = ۱۳۰^\circ \Rightarrow B\hat{A}E = ۶۵^\circ \quad (۱)$$

$$A\hat{E}F = \frac{۹۰}{۲} = ۴۵^\circ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \hat{D}_۱ = ۱۸۰ - ۱۱۰ = ۷۰^\circ$$

$$D\hat{B}C = ۹۰^\circ,\ B\hat{D}F = ۷۰^\circ \Rightarrow F\hat{C}B = ۲۰^\circ$$

۲۸ از B به موازات عرض رودخانه و عمود بر آن بالا می‌آییم تا B' پیدا شود. سپس از B' به A وصل می‌کنیم تا نقطهٔ M به دست آید. از نقطهٔ M بر رودخانه عمود می‌کنیم تا به نقطهٔ N برسیم. درنتیجه محل احداث پل MN به دست می‌آید.



$$MNBB' \text{ متوازی‌الاضلاع } \begin{cases} MB' = NB \\ MN = B'B \end{cases}$$

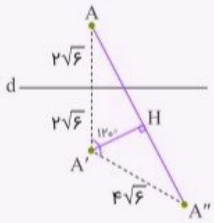
$$AMNB \overset{?}{=} AMB'B$$

$$AMB'B = AM + MB' + B'B$$

$$AMB'B = AM + NB + MN$$

$$\Rightarrow AMNB = AMB'B$$

۲۹



$$AA' = A'A'' = ۴\sqrt{۶}$$

$$A\overset{\Delta}{A'}H \ : AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۴\sqrt{۶}) = ۶\sqrt{۲}$$

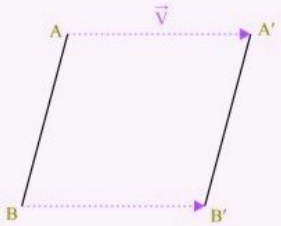
$$AA' = ۲AH = ۲(۶\sqrt{۲}) = ۱۲\sqrt{۲}$$

پاسخ سؤالات ۳۰ تا ۳۱

۳۰

	شیب خط را حفظ می‌کند	جهت شکل را حفظ می‌کند
دوران	نادرست	درست
تجانس	درست	درست

۳۱



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AA'}=\vec{V}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}AA'\parallel V\\ AA'=V\end{array}\right.\\ \overrightarrow{BB'}=\vec{V}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}BB'\parallel V\\ BB'=V\end{array}\right.\end{array}\right\}\Rightarrow AA'\overset{\parallel}{=}BB'$$

$\Rightarrow$ چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است $\Rightarrow AB\parallel A'B'$

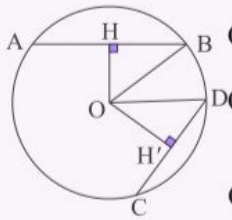
$\Rightarrow$ شیب خط حفظ می‌شود

۳۲

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AM=MB\\ AN=NC\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{عکس تالس}}MN\parallel BC\\ \left.\begin{array}{l}AP=PA'\\ AN=NC\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{عکس تالس}}NP\parallel CA'\end{array}\right\}\Rightarrow A'\text{ و }C\text{ و }B\text{ در یک امتدادند}$$

$\Rightarrow A\hat{A'}C=۹۰^\circ$

۳۳ شعاع‌های OB و OD را رسم می‌کنیم:



$OH\perp AB\ \Rightarrow\ HB=\dfrac{AB}{۲}\quad(۱)$

$OH'\perp CD\ \Rightarrow\ DH'=\dfrac{CD}{۲}\quad(۲)$

$\overset{\Delta}{OBH}:OB^۲=OH^۲+HB^۲\ \Rightarrow\ OH^۲=OB^۲-HB^۲$

$\xrightarrow{OB=R\,,\,(۱)}\ OH^۲=R^۲-(\dfrac{AB}{۲})^۲$

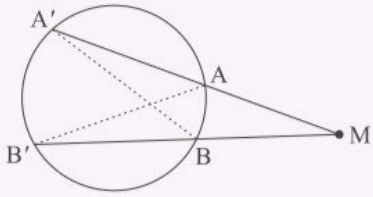
$\overset{\Delta}{ODH'}:OD^۲=OH'^۲+H'D^۲\ \Rightarrow\ OH'^۲=OD^۲-H'D^۲$

$\xrightarrow{OD=R\,,\,(۲)}\ OH'^۲=R^۲-(\dfrac{CD}{۲})^۲$

$AB>CD\ \Rightarrow\ \dfrac{AB}{۲}>\dfrac{CD}{۲}\ \Rightarrow\ (\dfrac{AB}{۲})^۲>(\dfrac{CD}{۲})^۲$

$\Rightarrow\ R^۲-(\dfrac{AB}{۲})^۲<R^۲-(\dfrac{CD}{۲})^۲\ \Rightarrow\ OH<OH'$

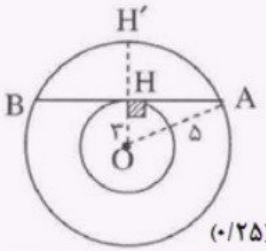
۳۴



$$\begin{cases}\widehat{A'}=\widehat{B'}=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\\ \widehat{M}=\widehat{M}\end{cases}\xrightarrow{\text{زز}}\overset{\Delta}{MBA'}\sim\overset{\Delta}{MAB'}\Rightarrow\frac{MB}{MA}=\frac{MA'}{MB'}\Rightarrow MB.MB'=MA.MA'$$

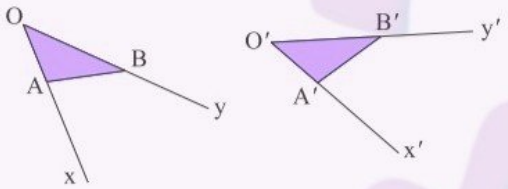
۳۵ AB وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر بر دایره کوچک‌تر مماس است. بنابراین شعاع OH بر AB عمود است و بنابراین $AH=HB$ (۰/۲۵). پس:

$$AH^{۲}=OA^{۲}-OH^{۲}\Rightarrow AH^{۲}\underset{(۰/۲۵)}{=}۵^{۲}-۳^{۲}\Rightarrow AH^{۲}=۱۶\Rightarrow AH=۴\Rightarrow AB=۸\ \ (۰/۲۵)$$



رسم شکل (۰/۲۵)

۳۶



فرض: T تبدیل طولپا و $T(x\hat{O}y)=(x'\hat{O'}y')$

حکم: $x\hat{O}y=x'\hat{O'}y'$

اثبات: دو نقطهٔ A و B را به‌ترتیب روی Ox و Oy انتخاب می‌کنیم و تبدیل‌یافتهٔ آن‌ها را A' و B' می‌نامیم، که به‌ترتیب روی $O'x'$ و $O'y'$ قرار دارد. از A به B و از A' به B' وصل می‌کنیم، خواهیم داشت:

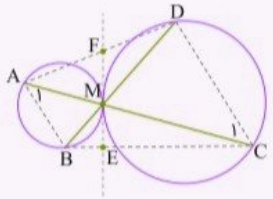
$$\left.\begin{array}{l}T(A)=A'\\T(B)=B'\\T(O)=O'\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}T(OA)=O'A'\\T(OB)=O'B'\\T(AB)=A'B'\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{T تبدیل طولپا}}\left.\begin{array}{r}OA=O'A'\\OB=O'B'\\AB=A'B'\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{ض ض ض}}\Delta OAB\cong\Delta O'A'B'$$

$$\Rightarrow\ x\hat{O}y=x'\hat{O'}y'\ \text{یا}\ \hat{O}=\hat{O'}$$

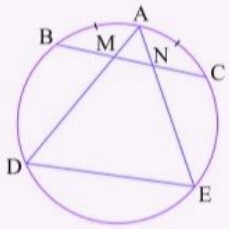
۳۷ ابتدا مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم می‌کنیم (FE).



$$F\hat{M}D = \hat{C}_۱ = \frac{\overset{\frown}{MD}}{۲} \quad (۱)$$
$$F\hat{M}D = B\hat{M}E \quad (۲)$$
$$B\hat{M}E = \hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{MB}}{۲} \quad (۳)$$

ذوزنقه : $(۱),(۲),(۳) \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$

۳۸



برای اینکه چهار ضلعی محاطی باشد، باید زوایای روبه‌رو مکمل یکدیگر باشند.

$$\begin{cases} M\hat{D}E = \dfrac{\overset{\frown}{ACE}}{۲} \\ M\hat{N}E = \dfrac{\overset{\frown}{BDE} + \overset{\frown}{AC}}{۲} \end{cases} \Rightarrow M\hat{D}E + M\hat{N}E = \frac{\overset{\frown}{ACE} + \overset{\frown}{BDE} + \overset{\frown}{AC}}{۲}$$

$$\Rightarrow M\hat{D}E + M\hat{N}E = \frac{\overset{\frown}{ACE} + \overset{\frown}{BDE} + \overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$